

TEORIE SPOLEHLIVOSTI – METODY A APLIKACE

Zdeněk Karpíšek

Odbor stochastických a optimalizačních metod, Ústav matematiky

Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně

Technická 2, 616 69 Brno

e-mail: karpisek@fme.vutbr.cz, <http://www.mat.fme.vutbr.cz/>

Abstrakt: Přehledový referát je orientován na základní metody stochastického modelování, analýzu a výpočty spolehlivosti sledovaných objektů. Jsou popsány nejčastěji používané funkční a číselné charakteristiky spolehlivosti, rozdělení pravděpodobnosti pro spolehlivost, některé metody určení spolehlivosti systému pomocí teorie grafů, základní model obnovy, typy zkušebních plánů a statistické metody pro vyhodnocení provozní spolehlivosti. Výpočty jsou realizovány pomocí profesionálního a nově vytvořeného software pro spolehlivost.

1. Některé obecné pojmy

Obecné pojmy a názvosloví ve spolehlivosti jsou v současné době dány především normami ČSN IEC, případně dosud ještě nenahrazenými normami ČSN [12]. V aplikacích jsou tyto pojmy modifikovány matematicko-statistickou terminologií a konvencemi v oblastech užití spolehlivostních metod. Z rozsáhlého spolehlivostního názvosloví prezentujeme pouze základní pojmy, které se nejčastěji používají.

Objekt je část zařízení, systém, funkční jednotka, přístroj nebo systém, se kterým je možno se individuálně zabývat. Objekty se dělí na opravované a neopravované. **Opravovaný** objekt se po poruše opravuje. **Neopravovaný** objekt se po poruše neopravuje a může být **opravitelný** nebo **neopravitelný**.

Spolehlivost je souhrnný termín používaný pro popis pohotovosti a činitelů, které ji ovlivňují: bezporuchovost, udržitelnost a zajištěnost údržby. Spolehlivost se používá pouze pro obecný nekvantitativní popis.

Pohotovost je schopnost objektu být ve stavu schopném plnit požadovanou funkci v daných podmínkách, v daném časovém intervalu za předpokladu zajištění požadovaných vnějších prostředků. Tato schopnost závisí na kombinaci hledisek bezporuchovosti, udržitelnosti a zajištěnosti údržby.

Porucha je jev, představující ukončení schopnosti objektu plnit požadovanou funkci. Poruchy se dle povahy a příčin dále specifikují.

Obnova objektu je buď **oprava** po poruše (operativní nahodilá údržba) anebo **plánovaná obnova** (plánovaná preventivní údržba).

Doba opravy je část doby údržby po poruše, během níž se na objektu provádějí opravárenské operace. Doba opravy se obvykle neshoduje s dobou důsledků poruchy.

Doba do první poruchy je celková doba provozu objektu od okamžiku prvního uvedení do použitelného stavu až do poruchy.

Doba mezi poruchami je doba trvání mezi dvěma po sobě následujícími poruchami opravovaného objektu.

2. Stochastický model spolehlivosti

Stochastický model spolehlivosti objektu spočívá v předpokladu [1,2,3,4], že **doba bezporuchového provozu** je spojitá náhodná veličina (proměnná) T , která nabývá hodnot $t \in (0, \infty)$. Tato náhodná veličina je plně popsána funkčními charakteristikami: **distribuční funkcí**, **hustotou pravděpodobnosti**, **funkcí spolehlivosti** a **intenzitou poruch**.

Distribuční funkce náhodné veličiny T je funkce

$$F(t) = P(T < t),$$

definovaná pro všechna $t \in (-\infty, \infty)$. Vyjadřuje pravděpodobnost toho, že doba bezporuchového provozu objektu je menší než t , takže $F(t) = 0$ pro všechna $t \in (-\infty, 0)$.

Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny T je taková nezáporná funkce $f(t)$, že

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = F(t)$$

pro všechna $t \in (-\infty, \infty)$.

Funkce spolehlivosti náhodné veličiny T je funkce

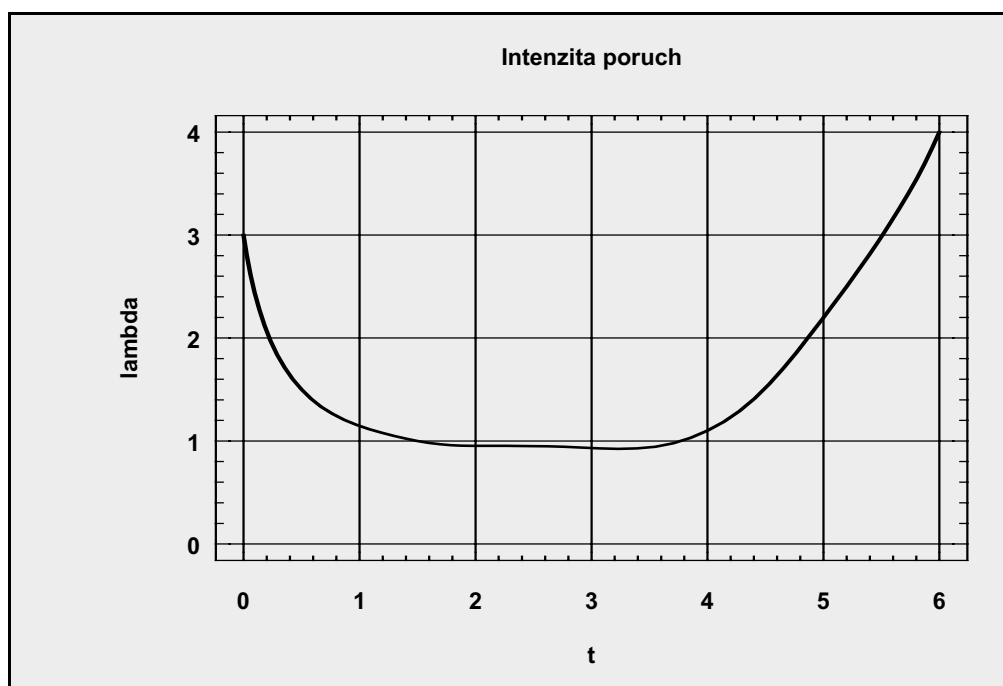
$$R(t) = 1 - F(t) = P(T \geq t)$$

pro všechna $t \in (-\infty, \infty)$. Vyjadřuje **spolehlivost objektu**, tedy pravděpodobnost, že doba bezporuchového provozu objektu je aspoň t .

Intenzita náhodné veličiny T je funkce

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

nazývaná také **intenzita poruch**. Vyjadřuje relativní změnu spolehlivosti objektu, přičemž výraz $\lambda(t)dt$ představuje infinitesimální podmíněnou pravděpodobnost toho, že porucha objektu nastane v intervalu $\langle t; t + dt \rangle$ vzhledem k tomu, že doba bezporuchového provozu objektu bude aspoň t .



Obr. 2.1

Na obr. 2.1 je typický graf intenzity $\lambda(t)$, tzv. **vanová křivka**, reálného neopravovaného objektu, která má tři úseky. První klesající úsek odpovídá tzv. **období počátečního provozu**, druhý zhruba konstantní úsek je **období normálního provozu** a třetí rostoucí úsek vyjadřuje **období dožití** objektu. Vyšší relativní poruchovost objektu v prvním úseku je obvykle způsobena poruchami zaviněnými konstrukcí a výrobou, a objekt by měl být ve

zkušebnímu provozu ("zahořování"). Rostoucí relativní poruchovost objektu ve třetím úseku povětšinou odpovídá poruchám způsobeným únavou materiálu, stárnutím apod.

Z libovolné funkční charakteristiky spolehlivosti můžeme určit ostatní, neboť mezi nimi platí vztahy uvedené v tabulce 2.1.

Tabulka 2.1

Funkční charakteristiky	$f(t)$	$F(t)$	$R(t)$	$\lambda(t)$
$f(t)$	=	$\frac{dF(t)}{dt}$	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$\lambda(t) \exp \left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]$
$F(t)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	=	$1 - R(t)$	$1 - \exp \left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]$
$R(t)$	$1 - \int_0^t f(\tau) d\tau$	$1 - F(t)$	=	$\exp \left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]$
$\lambda(t)$	$\frac{f(t)}{1 - \int_0^t f(\tau) d\tau}$	$\frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1 - F(t)}$	$-\frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$	=

Někdy se ještě používá další funkční charakteristika, tzv. **kumulovaná intenzita poruch**

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau.$$

Koncentrované informace o spolehlivosti objektu poskytují **číselné charakteristiky** náhodné veličiny T [5,6]. Jsou to zejména: **střední hodnota**, **rozptyl**, **směrodatná odchylka**, **variační koeficient** a **kvantily** doby do poruchy (doby bezporuchového stavu) objektu.

Střední hodnota náhodné veličiny T

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

je **střední doba bezporuchového stavu** objektu.

Rozptyl náhodné veličiny T

$$D(T) = E([T - E(T)]^2) = \int_0^{\infty} [t - E(T)]^2 f(t) dt = 2 \int_0^{\infty} t R(t) dt - [E(T)]^2,$$

směrodatná odchylka

$$\sigma(T) = \sqrt{D(T)}$$

a **variační koeficient**

$$V(T) = \frac{\sigma(T)}{E(T)},$$

který se také uvádí ve tvaru $100V(T) \%$.

P – kvantil ($100P$ % – kvantil) t_p náhodné veličiny T je dán rovnicí $F(t_p) = P$, kde $P \in (0; 1)$. Kvantil $t_{0,5}$ se nazývá **medián** náhodné veličiny T . Kvantilu t_p se také říká **P – mezní hodnota ($100P$ % - mezní hodnota)** doby bezporuchového provozu objektu. Při sledování velkého souboru stejných objektů za stejných podmínek provozu lze očekávat, že cca $100P$ % těchto objektů bude mít poruchu do doby t_p .

Kvantil $t_\gamma^* = t_{1-\gamma}$, který lze také získat z rovnice $R(t_\gamma^*) = \gamma$, je **γ – zaručená doba bezporuchového provozu (100γ % – zaručená doba bezporuchového provozu)** objektu [13]. Při sledování většího souboru stejných objektů za stejných podmínek jejich provozu lze očekávat, že cca 100γ % těchto objektů bude mít poruchu až po době t_γ^* .

Dle potřeby se používají další číselné charakteristiky náhodné veličiny T , např. **koefficient asymetrie**

$$\alpha_3(T) = \frac{E([T - E(T)]^3)}{[\sigma(T)]^3}$$

a **koefficient excesu**

$$\alpha_4(T) = \frac{E([T - E(T)]^4)}{[\sigma(T)]^4} - 3.$$

3. Rozdělení pravděpodobnosti

Pro modelování doby bezporuchového provozu a také doby obnovy objektu (viz odstavec 6) se nejčastěji používají následující rozdělení pravděpodobnosti [3,5,6].

Exponenciální rozdělení $E(\lambda)$, $\lambda > 0$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$:

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad F(t) = 1 - \exp(-\lambda t), \quad R(t) = \exp(-\lambda t), \quad \lambda(t) = \lambda,$$

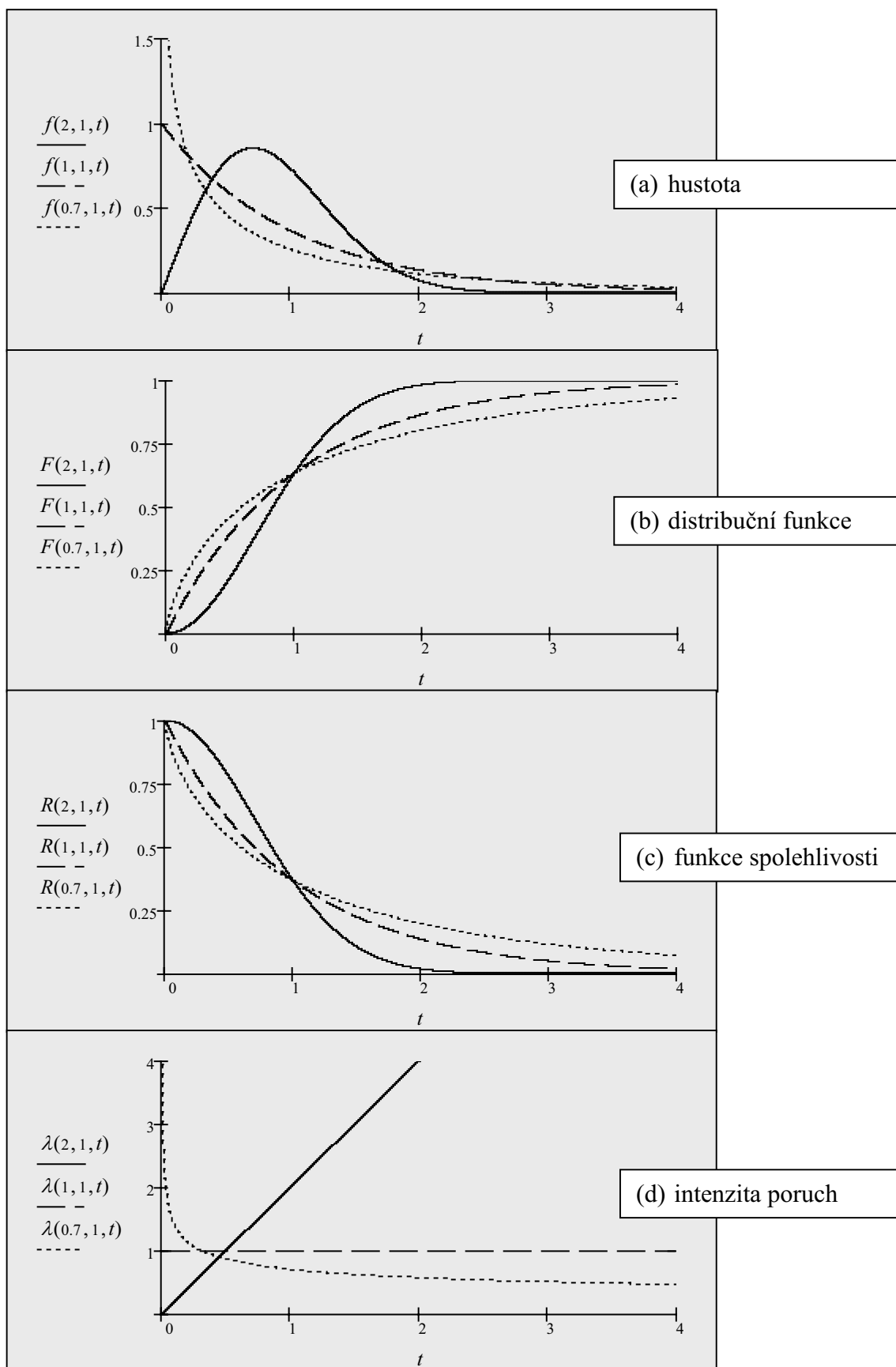
$$E(T) = \sigma(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(T) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad t_p = -\frac{\ln(1-P)}{\lambda}.$$

Někdy se toto rozdělení uvádí s parametrem $\lambda = 1/\delta$, kde $\delta > 0$. Exponenciální rozdělení je kladně asymetrické a dobře popisuje spolehlivost objektů, u nichž dochází k poruše ze zcela náhodných (vnějších) příčin a nikoliv zákonitě v důsledku jejich opotřebení. např. u elektronických prvků. Jde o rozdělení "bez paměti", neboť pro náhodnou veličinu T s tímto rozdělením je $P(T \geq t + a | T \geq a) = P(T \geq t)$ pro libovolné kladné reálné a . Dle potřeby se také používá **dvouparametrické exponenciální rozdělení** $E(\lambda, c)$, které dostaneme posunutím rozdělení $E(\lambda)$ o s tzv. **prahovou hodnotou** c , takže $E(\lambda) \equiv E(\lambda, 0)$. Jde o model spolehlivosti objektu, jehož činnost začala v době $t = c$. Exponenciální rozdělení je speciálním případem následujícího rozdělení.

Tříparametrické Weibullovo rozdělení $W(b, c, \delta)$, $b > 0$, c reálné, $\delta > 0$, $t \in \langle c, \infty \rangle$:

$$f(t) = \frac{b}{\delta} \left(\frac{t-c}{\delta} \right)^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{t-c}{\delta} \right)^b \right], \quad F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t-c}{\delta} \right)^b \right],$$

$$R(t) = \exp \left[- \left(\frac{t-c}{\delta} \right)^b \right], \quad \lambda(t) = \frac{b}{\delta} \left(\frac{t-c}{\delta} \right)^{b-1},$$



Obr. 3.1

$$E(T) = c + \delta \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right), D(T) = \delta^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{b} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{b} + 1\right) \right],$$

$$\alpha_3(T) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{b} + 1\right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{2}{b} + 1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{b} + 1\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{2}{b} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{b} + 1\right) \right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$t_p = c + \delta \left[-\ln(1 - P) \right]^{\frac{1}{b}},$$

kde b je **parametr tvaru**, c je **parametr polohy (prahový parametr)**, δ je **parametr měřítka** a

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} y^{z-1} \exp(-y) dy$$

je tzv. **gama funkce**. Někdy se uvádí Weibullovo rozdělení s jiným parametrem měřítka $a = \delta^b$. Pro $0 < b < 1$ je $\lambda(t)$ klesající funkce a rozdělení dobře vystihuje dobu do poruchy objektu, u něhož se vyskytují skryté vady a v průběhu času téměř nestárne. Pro $b = 1$ je intenzita konstantní, konkrétně $\lambda(t) = 1/\delta$, a jde o rozdělení exponenciální. Pro $b > 1$ je $\lambda(t)$ rostoucí funkcí a rozdělení dobře vystihuje dobu do poruchy stárnoucího objektu. Pro $b \approx 3,6$ je Weibullovo rozdělení blízké normálnímu rozdělení. V praxi se nejčastěji užívá **dvouparametrické Weibullovo rozdělení** $W(b, \delta) \equiv W(b, 0, \delta)$, tedy pro prahovou hodnotu $c = 0$. Na obr. 3.1 jsou grafy funkčních charakteristik dvouparametrického rozdělení $W(b, \delta)$

s parametry $b = 2; 1; 0,7$ a $\delta = 1$. Náhodná veličina $T = \delta \left(\frac{X}{\delta} \right)^{\frac{1}{b}}$ má rozdělení $W(b, \delta)$,

jestliže X má exponenciální rozdělení $E(1/\delta)$. Mezi významné vlastnosti Weibullova rozdělení $W(b, c, \delta)$ patří skutečnost, že náhodná veličina $T = \min(T_1, \dots, T_n)$, kde T_1, \dots, T_n jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením $W(b, c, \delta)$, má Weibullovo rozdělení $W(b, c, \delta/n^{1/b})$.

Logaritmicko-normální rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$, μ reálné, $\sigma^2 > 0$, $t \in (0, \infty)$:

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], F(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right), R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right),$$

$$E(T) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), D(T) = \exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1], t_p = \exp(\mu + \sigma u_p),$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce a u_p je P -kvantil normovaného normálního rozdělení $N(0;1)$. Rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$ je kladně asymetrické a nazývá se také **lognormální**. Náhodná veličina $T = \exp(X)$ má rozdělení $LN(\mu, \sigma^2)$, jestliže X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Gama rozdělení $\Gamma(m, \delta)$, $m > 0$, $\delta > 0$, $t \in (0, \infty)$:

$$f(t) = \frac{1}{\delta^m \Gamma(m)} t^{m-1} \exp\left(-\frac{t}{\delta}\right), F(t) = \Gamma(m, t/\delta), R(t) = 1 - \Gamma(m, t/\delta),$$

$$E(T) = m\delta, D(T) = m\delta^2.$$

Přitom

$$\Gamma(z, x) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x y^{z-1} \exp(-y) dy$$

je tzv. **neúplná gama funkce**. Rozdělení $\Gamma(m, \delta)$ je kladně asymetrické a pro $m = 1$ jde o exponenciální rozdělení $E(1/\delta)$. Jestliže T_1, \dots, T_n jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny

s rozděleními $\Gamma(m_1, \delta), \dots, \Gamma(m_n, \delta)$, pak náhodná veličina $T = a \sum_{j=1}^n T_j$ má pro $a > 0$ rozdělení

$\Gamma\left(\sum_{j=1}^n m_j, a\delta\right)$. Speciálně pro vzájemně nezávislé náhodné veličiny T_1, \dots, T_n s exponenciálním

rozdělením $E(1/\delta)$ má náhodná veličina $T = \sum_{j=1}^n T_j$ rozdělení $\Gamma(n, \delta)$, nazývané také

Erlangovo rozdělení.

Rayleighovo rozdělení $Ra(\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, $t \in (0, \infty)$:

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad R(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$E(T) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad D(T) = \frac{4 - \pi}{2} \sigma^2, \quad t_p = \sigma \left[-2 \ln(1 - P)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Rozdělení $Ra(\sigma^2)$ je kladně asymetrické a užívá se také v modelování tzv. **radiální chyby**.

Maxwellovo rozdělení $Ma(\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, $t \in (0, \infty)$:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad E(T) = \sigma \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \quad D(T) = \frac{3\pi - 8}{\pi} \sigma^2.$$

Rozdělení $Ma(\sigma^2)$ je kladně asymetrické a nalezneme je v modelování rychlosti molekul.

Dále se používají rozdělení **extrémální, useknuté normální rozdělení**. Někdy také můžeme aplikovat **směsi** rozdělení (**konvexní kombinace, superpozice**) hustot pravděpodobnosti nebo intenzit rozdělení. Např. pro **směs dvou hustot exponenciálního rozdělení** je

$$f(t) = c_1 \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2 \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t), \quad F(t) = 1 - c_1 \exp(-\lambda_1 t) - c_2 \exp(-\lambda_2 t),$$

$$R(t) = c_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2 \exp(-\lambda_2 t), \quad \lambda(t) = \frac{c_1 \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2 \lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)}{c_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2 \exp(-\lambda_2 t)},$$

$$E(T) = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}, \quad \text{kde } c_1, c_2 \geq 0 \text{ a } c_1 + c_2 = 1.$$

4. Spolehlivost systémů

Soubor nějakých objektů sloužících k vykonávání určitých požadovaných činností zpravidla označujeme názvem **systém (soustava)**. Složitější systémy se z hlediska sledované činnosti při analýze obvykle rozkládají na jednodušší funkční celky (**subsystémy**), popřípadě až na dále nedělitelné části, které nazýváme **prvky** systému.

Strukturu systému při jeho rozkladu na prvky popisujeme nejčastěji pomocí tzv. **blokového schématu**. Blokové schéma vyjadřuje logickou strukturu systému a spolehlivost

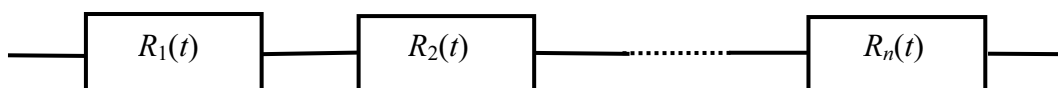
systému počítáme pomocí spolehlivostí jednotlivých prvků. Předpokládáme přitom tzv. **dvoustavový model**, kdy systém (prvek) je buď v **bezporuchovém stavu** (logická hodnota 1) anebo v **poruchovém stavu** (logická hodnota 0). Pro jednoduchost ztotožníme označení systému s logickou proměnnou S , která vyjadřuje jeho stav a jednotlivé prvky analogicky označíme A_1, \dots, A_n . Strukturu systému lze také vyjádřit pomocí **orientovaného grafu**, kdy orientované hrany grafu odpovídají prvkům systému a uzly grafu vyjadřují spojení prvků.

Jestliže stav prvku A_k neovlivňuje stav prvku A_l a naopak ($k \neq l$), pak říkáme, že prvky A_k, A_l jsou **nezávislé**. V případě, že stav libovolné množiny prvků neovlivňuje stav libovolné jiné množiny prvků téhož systému a obě množiny jsou disjunktní, pak říkáme, že prvky systému jsou **vzájemně nezávislé**.

Stav prvku (systému) je obecně závislý na čase t , takže jeho stav je funkce $A(t)$ nabývající hodnot 1 a 0, kde $t \in \langle 0, \infty \rangle$ a $A(0) = 1$. Předpokládáme, že stav $A(t)$ může přejít pouze z hodnoty 1 do hodnoty 0 (nikoli naopak), takže jde o prvek (systém) bez **obnovy**. Dále předpokládáme, že doba bezporuchového stavu (doba do poruchy) je nezáporná náhodná veličina T , takže jeho **funkce spolehlivosti (spolehlivost)** je $R(t) = P(T \geq t) = P(A(t) = 1)$.

Nejčastější spojení prvků $A_i, i = 1, \dots, n$, v blokovém schématu je spojení **sériové**, kdy $A_S = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ a **paralelní**, kdy $A_P = A_1 \vee \dots \vee A_n$. Přitom \wedge značí logickou konjunkci a \vee logickou disjunkci a těmito logickým operacím odpovídají operace průniku \cap a sjednocení \cup s náhodnými jevy. Bezporuchový stav sériového systému nastane pouze při bezporuchovém stavu všech jeho prvků, naopak bezporuchový stav paralelního systému nastane při bezporuchovém stavu alespoň jednoho jeho prvku. Dalším často užívaným typem je **kombinované** spojení, které je vytvořeno opakovaným paralelním nebo sériovým zapojením paralelních a sériových soustav. Blíže o spojení prvků je v [1,2,4].

Blokové schéma sériového systému S je:



Jestliže $R_S(t)$ značí spolehlivost sériového systému a A_i jsou vzájemně nezávislé prvky se spolehlivostmi $R_i(t)$ pro $i = 1, \dots, n$, pak pro $\forall t \in \langle 0, \infty \rangle$ je

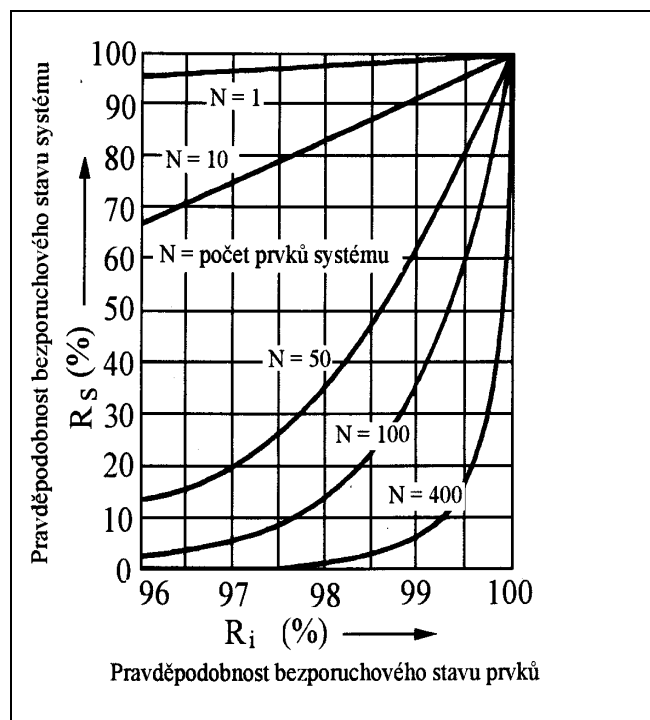
$$R_S(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \leq \min_i R_i(t),$$

$$F_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(t)) \geq \max_i F_i(t),$$

$$\lambda_S(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \geq \max_i \lambda_i(t).$$

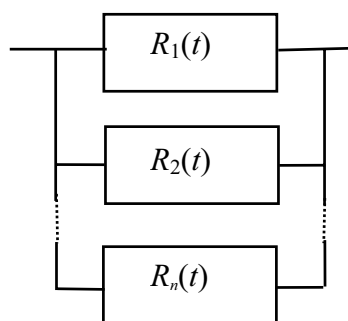
To znamená, že spolehlivost sériového systému je nejvýše rovna spolehlivosti jeho "nejhoršího" prvku a např. pro vzájemně nezávislé prvky s exponenciálními rozděleními $E(\lambda_i)$ doby bezporuchového provozu má sériový systém opět exponenciální rozdělení této

doby $E(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$. Vliv počtu prvků na spolehlivost sériového systému (se stejně spolehlivými prvky) je znázorněn na obr. 4.1.



Obr. 4.1

Blokové schéma paralelního systému **P** je:

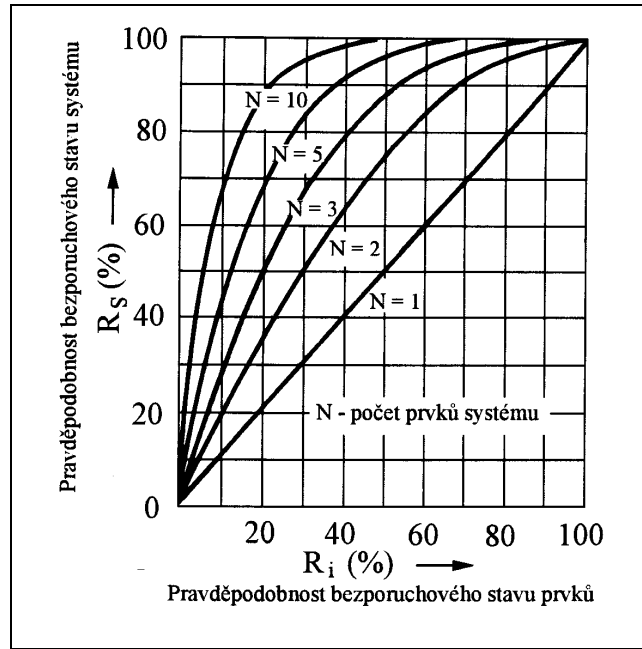


Jestliže $R_p(t)$ značí spolehlivost paralelního systému a A_i jsou vzájemně nezávislé prvky se spolehlivostmi $R_i(t)$ pro $i = 1, \dots, n$, pak pro $\forall t \in \langle 0; \infty \rangle$ je

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) \geq \max_i R_i(t),$$

$$F_p(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t) \leq \min_i F_i(t).$$

To znamená, že spolehlivost paralelního systému je větší nebo rovna spolehlivosti jeho "nejlepšího" prvku. Vliv počtu prvků na spolehlivost paralelního systému (se stejně spolehlivými prvky) je znázorněn na obr. 4.2.



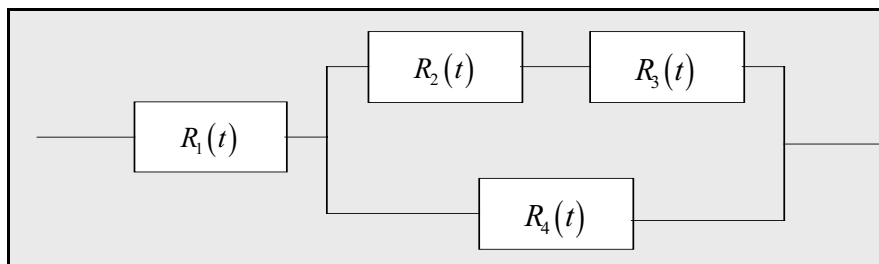
Obr. 4.2

Jestliže $R_K(t)$ značí spolehlivost nějakého kombinovaného systému A_K z daných vzájemně nezávislých prvků A_i , pak pro $\forall t \in \langle 0; \infty \rangle$ platí, že

$$R_S(t) \leq R_K(t) \leq R_P(t).$$

Spolehlivost kombinovaného systému K lze určit v jednodušších případech přímo pomocí vlastností pravděpodobnosti nezávislých náhodných jevů. Např. spolehlivost kombinovaného systému $A = A_1 \wedge [(A_2 \wedge A_3) \vee A_4]$ z obr. 4.3 postupnou aplikací výše uvedených vzorců pro $R_S(t)$ a $R_P(t)$ dostaneme

$$R_K(t) = R_1(t) [1 - (1 - R_2(t)R_3(t))(1 - R_4(t))].$$



Obr. 4.3

Ve složitějších případech se pro vyjádření konfigurace a výpočet spolehlivosti systému používají speciální metody z teorie grafů nebo matematické logiky [1,2,4]: **metoda seznamu, metoda rozkladu, metoda cest a řezů, systémová funkce, strom poruch** aj.

Základem **metody seznamu** je sestavení seznamu všech možných logických událostí v systému. Jde vlastně o seznam všech variací n -té třídy s opakováním z hodnot 0 a 1. Získáme tak 2^n disjunktivních náhodných jevů, jimž odpovídá buď bezporuchový stav systému (logická hodnota 1) anebo stav poruchový (logická hodnota 0). Spolehlivost systému je potom rovna součtu pravděpodobností uvedených disjunktivních náhodných jevů odpovídajících všem možným bezporuchovým stavům systému. Metodou seznamu určíme spolehlivost

kombinovaného systému na obr. 4.3. Seznam pro tento systém složený ze 4 prvků sestává ze 16 variací s opakováním. Výsledný stav systému se určuje podle blokového schématu, kde se prvky s poruchou (logická hodnota 0) vynechají. Jestliže zůstane alespoň jedno nepřerušené spojení mezi vstupem a výstupem, je systém v bezporuchovém stavu. Seznam i s výsledným stavem systému A je tabulce 4.1.

Tabulka 4.1

A_1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
A_2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
A_3	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
A_4	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
A	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Spolehlivost systému (pro jednoduchost nepíšeme proměnnou t) pak je

$$\begin{aligned}
 R &= R_1 R_2 R_3 R_4 + R_1 (1 - R_2) R_3 R_4 + R_1 R_2 (1 - R_3) R_4 + \\
 &\quad + R_1 R_2 R_3 (1 - R_4) + R_1 (1 - R_2) (1 - R_3) R_4 = \\
 &\quad R_1 (1 - (1 - R_2 R_3) (1 - R_4)).
 \end{aligned}$$

Metoda cest vychází z grafu systému. Tento graf má nejméně tolik hran, kolik má soustava prvků, ale může jich mít i více, jestliže se hrana odpovídající jednomu prvku opakuje ve více spojeních vstupu s výstupem [1,2,10]. **Sled** v orientovaném grafu je posloupnost hran, ke které lze najít takovou posloupnost uzlů, že pro každou hranu je odpovídající uzel uzlem vstupním a následující uzel uzlem výstupním, a tato posloupnost vede od vstupního uzlu sledu k výstupnímu uzlu sledu. Jestliže jsou v tomto sledu všechny uzly různé, potom jsou také všechny hrany různé a sled se nazývá **cesta**. Cesta tedy prochází každým uzlem grafu nejvýše jednou. Pro spolehlivost systému uvažujeme pouze cesty ze vstupního do výstupního uzlu celého grafu. Spolehlivost systému je potom rovna pravděpodobnosti toho, že alespoň jedna cesta sestává pouze z hran, které odpovídají prvkům bez poruchy. Systém z obr. 4.3 obsahuje dvě cesty C_1 a C_2 , pro jejichž bezporuchové stavy platí, že

$$C_1 = ((A_1 = 1) \wedge (A_2 = 1) \wedge (A_3 = 1)), \quad C_2 = ((A_1 = 1) \wedge (A_4 = 1)).$$

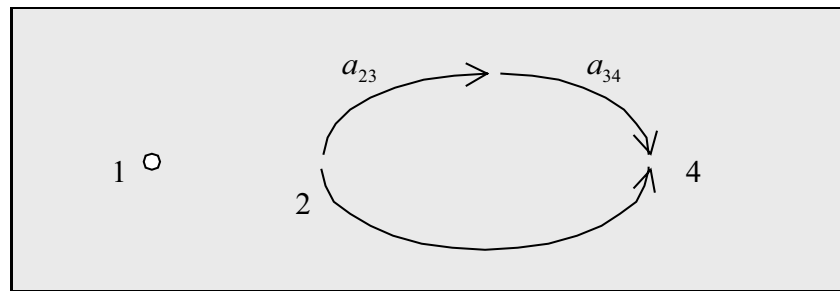
Potom spolehlivost systému je (pro jednoduchost nepíšeme proměnnou t)

$$\begin{aligned}
 R &= P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = \\
 &= R_1 R_2 R_3 + R_1 R_4 - R_1 R_2 R_3 R_4 = \\
 &= R_1 (1 - (1 - R_2 R_3) (1 - R_4)).
 \end{aligned}$$

Jestliže kombinovaný spolehlivostní systém s n prvky má neprázdný prostý acyklický orientovaný graf s tzv. **maticí sousednosti grafu** $A = (a_{kl})_{k,l=1}^n$, můžeme určit všechny cesty následujícím způsobem [9]. Prvek c_{kl} matice $C = (E - A)^{-1} - E$, kde E je jednotková matice, vyjadřuje všechny cesty z uzlu k do uzlu l v daném grafu, když nahradíme aritmetickou operaci sečítání $+$ logickým sečítáním \vee a aritmetické násobení \cdot logickým násobením \wedge v řetězcích c_{kl} z prvků a_{uv} , $u, v = 1, \dots, n$. Navíc pro $k \neq l$ je $c_{kl} = D_{lk}$, kde D_{lk} je algebraický doplněk prvku d_{lk} matice $D = E - A$. V matici A přitom klademe $a_{kl} = 0$, právě když z uzlu k do uzlu l nevede hrana, jinak $a_{kl} = A_i$. Jde vlastně o prosté zobrazení množiny prvků A_i

systému S na množinu hran a_{kl} . V případě, že daný graf není prostý (obsahuje vícenásobné hrany), lze jej převést na homeomorfní prostý graf např. vhodným půlením hran [8]. To umožňuje výpočet všech cest ze vstupního uzlu $k=1$ do výstupního uzlu $l=n$ grafu pro systém S pomocí D_{kl} pro libovolnou konkrétní variaci stavů prvků ze seznamu a následně pak zjištění stavu systému. Jestliže S označuje přímo stav systému a za A_i dosadíme stav daného prvku, pak stav systému je $S = \text{sgn}(c_{1n}) = \text{sgn}(D_{n1})$, kde v algebraickém doplňku D_{n1} klademe $a_{uv} = 1$, resp. 0, jestliže stav odpovídajícího prvku je podle seznamu $A_i = 1$, resp. 0. Hodnota c_{lk} totiž vyjadřuje pro dané stavy A_i počet nepřerušovaných cest a hodnota $c_{lk} = 0$, právě když žádná cesta z uzlu k do uzlu l pro dané stavy A_i nevede.

Systém z výše uvedeného příkladu (obr. 4.3) má prostý acyklický orientovaný graf (obr. 4.4)



Obr. 4.4

a jeho matice sousednosti je $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Všechny cesty ze vstupního uzlu 1 do

výstupního uzlu 4 pak jsou

$$c_{14} = D_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -a_{12} & 0 & 0 \\ 1 & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 1 & -a_{34} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23}a_{34} + a_{12}a_{24}.$$

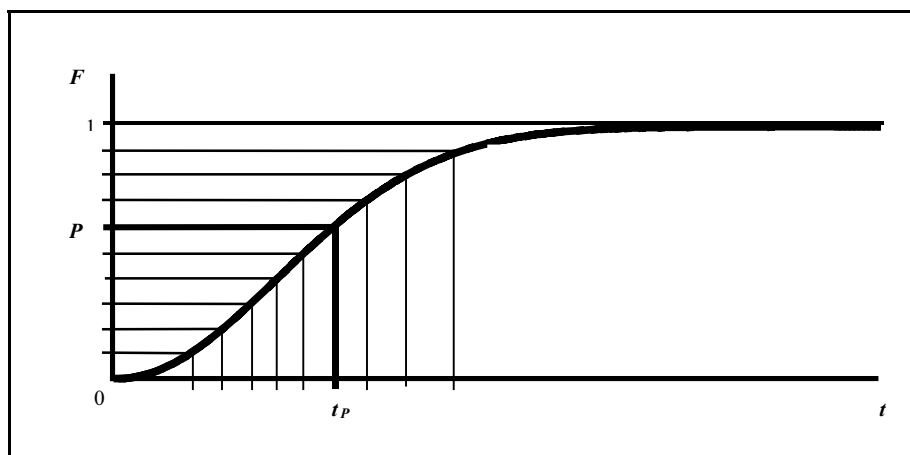
Z metody seznamu, metody cest a vlastností grafů [8] vychází **JK-algoritmus** pro výpočet spolehlivosti kombinovaného systému o n nezávislých prvcích s prostým acyklickým orientovaným grafem. Tento algoritmus pro implementaci na PC má kroky:

1. Vygenerujeme seznam všech možných stavů prvků daného systému ve formě matice s počtem řádků 2^n , které tvoří všechny variace (A_1, \dots, A_n) n -té třídy z dvouprvkové množiny $\{0;1\}$ s opakováním (jde vlastně o dvojková čísla od 0 do 2^{n-1}).
2. Pro každou variaci vypočteme pomocí algebraického doplňku D_{lk} stav systému $S_j = \text{sgn}(c_{1n}) = \text{sgn}(D_{n1})$, $j = 1, \dots, 2^n$, přičemž za prvky a_{kl} matice sousednosti dosadíme logickou hodnotu stavu odpovídajícího prvku systému z matice z kroku 1.
3. Spolehlivost systému $R(t)$ v čase t určíme pomocí spolehlivostí jednotlivých prvků $R_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, ze vztahu

$$R(t) = \sum_{j=1}^{2^n} \left\{ S_j \prod_{i=1}^n \left[(1 - R_i(t))^{1-A_i} (R_i(t))^{A_i} \right] \right\}.$$

Přímé výpočty střední hodnoty a rozptylu doby bezporuchového provozu systému bývají obtížné i pro nevelká množství prvků, které navíc mohou mít různá rozdělení pravděpodobnosti. Pro výpočet funkčních a číselných charakteristik se osvědčily následující netradiční numerické postupy.

(a) Numerickým řešením rovnice $F(t_p) = P$ určíme P -kvantily t_p výsledného rozdělení pravděpodobnosti systému tak, že položíme $P = \frac{j}{m}$, kde $j = 0, 1, \dots, m-1$. V případě, že rovnice $F(t_p) = P$ neurčuje kvantil t_p jednoznačně, položíme např. $t_p = \min\{t; F(t) \geq P\}$. Počet m dělicích bodů (kvantilů t_p) pro dělení intervalu $t \in \langle 0; \infty \rangle$ volíme tak, aby byla splněna podmínka $\frac{m-1}{m} < P_{\max}$, kde P_{\max} je vhodná velká pravděpodobnost (např. 0,9999), takže $m < \frac{1}{1 - P_{\max}}$. Tím získáme $m+1$ „kvantovaných“ hodnot spolehlivosti systému $R(t_p) = 1 - F(t_p)$ s diferencí přibližně $1/m$ a nevlastní integrál pro výpočet číselné charakteristiky pak aproximujeme např. pomocí Simpsonovy složené integrální formule s neekvidistantními uzlovými body $t_0 = 0 < t_{1/m} < \dots < t_{(m-1)/m} < t_{P_{\max}}$ na intervalu $\langle 0; t_{P_{\max}} \rangle$. Jde vlastně o numerickou podobu Lebesgueova integrálu - viz obr. 4.5.



Obr. 4.5

(b) Jestliže je přímý výpočet spolehlivosti systému $R(t)$ obtížný, můžeme ji určit podobným způsobem jako v (a). Místo kvantilu t_p pro celý systém určíme nejprve vektor kvantilů (t_{1P}, \dots, t_{nP}) , kde t_{iP} je P -kvantil i -tého prvku daného systému, $i = 1, \dots, n$ a $P = \frac{j}{m}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, resp. P_{\max} . Pak pro sériový systém je $t_p = \min(t_{1P}, \dots, t_{nP})$, pro paralelní systém je $t_p = \max(t_{1P}, \dots, t_{nP})$, a pro kombinované systémy funkce min a max skládáme [2]. Tímto způsobem opět získáme $m+1$ „kvantovaných“ hodnot spolehlivosti systému s diferencí přibližně $1/m$. Z nich potom analogicky jako v (a) určíme numerickou integrací střední hodnotu a rozptyl doby bezporuchového provozu systému.

(c) Numericky je také možno vypočítat diskrétní hodnoty hustoty pravděpodobnosti $f(t)$, např. pomocí formule druhého řádu

$$f(t_p) = \frac{F(t_{p+\delta}) - F(t_{p-\delta})}{t_{p+\delta} - t_{p-\delta}}, \quad P = 1/m, \dots, (m-1)/m,$$

kde $\delta = 1/m$ a $F(t_p) = 1 - R(t_p)$, přičemž v koncových bodech pro $P = 0$ a $P = P_{\max}$ použijeme formule prvního řádu. Podobně numericky vypočteme diskrétní hodnoty intenzity poruch soustavy pomocí formule druhého řádu

$$\lambda(t_p) = -\frac{\ln R(t_{p+\delta}) - \ln R(t_{p-\delta})}{t_{p+\delta} - t_{p-\delta}}, P = 1/m, \dots, (m-1)/m,$$

kde rovněž $\delta = 1/m$ a v koncových bodech pro $P = 0$ a $P = P_{\max}$ opět použijeme formule prvního řádu. Vycházíme přitom z toho, že $\lambda(t) = -\frac{d(\ln R(t))}{dt}$, a odtud odvozené numerické

formule dávají lepší výsledky než obvykle používané vzorce získané ze vztahu $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$.

Vypočtené diskrétní hodnoty funkčních charakteristik spolehlivosti je pak možno vhodným způsobem dále aproximovat, např. pomocí splajnů.

Spolehlivost systému můžeme také statisticky odhadnout simulací metodou Monte Carlo, kdy místo vypočtených kvantilů jednotlivých prvků systému generujeme jejich hodnoty t_p pomocí generátorů rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých prvků a $R(t)$ určíme opět pomocí funkcí min, max a jejich kombinací. Obvykle přitom transformujeme hodnoty získané generátorem rovnoměrně rozdělených náhodných čísel $x \in \langle 0; 1 \rangle$ pomocí kvantilové funkce $t = F_i^{-1}(x)$ pro i -tý prvek. Výsledky potom zpracováváme statisticky podobně jako u údajů o provozní spolehlivosti (viz odstavec 7).

5. Opravitelnost a pohotovost

Opravitelnost je dílčí spolehlivostní vlastnost objektu, vztahující se k jeho opravám po poruchách. Při jejím vyhodnocování vycházíme z doby trvání poruchy, resp. doby opravy. Doba poruchy bývá zpravidla větší (identifikace poruchy, příprava opravy, vlastní oprava, kontrola provedení opravy, zahájení provozu).

Předpokládáme základní provozní proces objektu, sestávající z dob provozu a dob poruch zařízení. Jde přitom o časovou posloupnost střídajících se dob provozu a dob oprav po poruše. Hovoříme o tzv. **procesu obnovy** (zahrnuje např. i plánovanou údržbu), kde doba opravy T^* je náhodná veličina s distribuční funkcí

$$G(t) = P(T^* < t),$$

která vyjadřuje pravděpodobnost toho, že doba opravy bude menší než t . Doba opravy má **hustotu pravděpodobnosti**

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt}$$

a **intenzitu oprav**

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)}.$$

Jde o analogii intenzity poruch, přičemž výraz $\mu(t)dt$ vyjadřuje infinitenzimální podmíněnou pravděpodobnost toho, že oprava bude ukončena v intervalu $\langle t; t + dt \rangle$ za podmínky, že doba opravy objektu bude aspoň t . Mezi funkčními charakteristikami doby opravy platí stejné vztahy jako mezi charakteristikami doby bezporuchového provozu.

Pohotovost je dílčí spolehlivostní vlastnost obnovovaného objektu, vyjadřující míru jeho bezporuchovosti. Základní model pohotovosti [4] vychází z předpokladu, že celková doba provozu objektu do i -té poruchy je náhodná veličina

$$U_i = T_1 + T_1^* + T_2 + T_2^* + \dots + T_i,$$

a že celková doba provozu objektu do ukončení i -té obnovy je náhodná veličina

$$V_i = T_1 + T_1^* + T_2 + T_2^* + \dots + T_i + T_i^* = U_i + T_i^*,$$

kde doby bezporuchových provozů T_i mají stejnou distribuční funkci $F(t_i)$, následující doby oprav T_i^* mají stejnou distribuční funkci $G(t_i^*)$, $i = 1, 2, \dots$, přičemž distribuční funkce $F(t_i)$ a $G(t_i^*)$ jsou obecně různé, a všechny náhodné veličiny T_i , T_i^* jsou vzájemně nezávislé.

Pohotovost $K(t)$ je pravděpodobnost, že objekt je v čase t v bezporuchovém provozu, tedy

$$K(t) = \sum_{i=0}^{\infty} P(V_i \leq t < U_{i+1}),$$

kde klademe $V_0 = 0$. Pro Laplaceovy obrazy pohotovosti a hustoty dob bezporuchového provozu a oprav platí [4]

$$L[K(t)] = \frac{1 - L[f(t)]}{s(1 - L[f(t)]L[g(t)]),$$

kde s je komplexní proměnná Laplaceova obrazu.

Pohotovost je vzhledem k času t stacionární a její asymptotická hodnota je tzv. **koeficient pohotovosti** objektu

$$k_p = K(\infty) = \frac{E(T)}{E(T) + E(T^*)},$$

který se dle zvyklostí někdy také uvádí v %. Např. pro exponenciální rozdělení doby bezporuchového provozu s parametrem λ a exponenciální rozdělení doby opravy

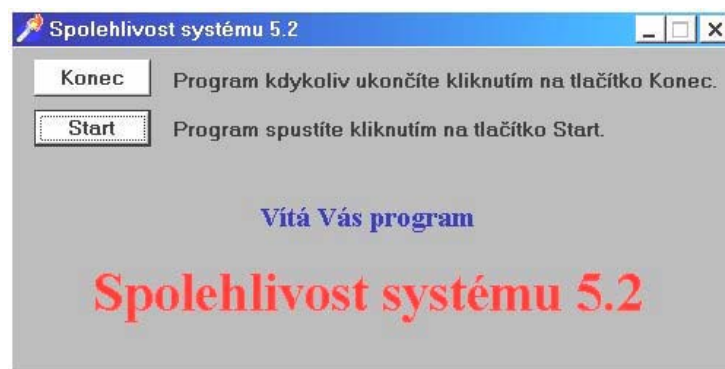
s parametrem μ je koeficient pohotovosti $k_p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

6. Software pro výpočet spolehlivosti systému

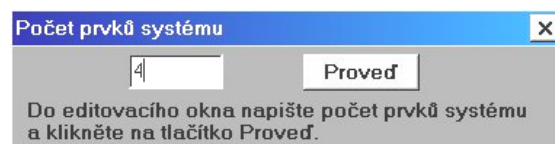
Pro přímý výpočet spolehlivosti $R_K(t)$ kombinovaného systému nezávislých prvků ze zadaných cest nebo matice sousednosti a zadaných spolehlivostí $R_i(t)$ jednotlivých prvků v libovolném čase t byl implementací JK-algoritmu vyvinut původní program pro PC [11]. Program, který byl vytvořen v programovacím jazyce Borland Delphi 5 jako nástupce dřívějšího programu, provádí výpočet některých funkčních a číselných charakteristik spolehlivosti systému pomocí algoritmu a postupů z předcházejícího oddílu.

Vstupními údaji, které zadává uživatel, jsou počet prvků systému n , struktura systému, kterou popisuje uživatel buď pomocí matice sousednosti grafu systému anebo pomocí systémové funkce a funkce spolehlivosti jednotlivých prvků systému $R_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, popř. čas t , ve kterém chce určit spolehlivost daného systému. Systém lze také načíst z textového souboru.

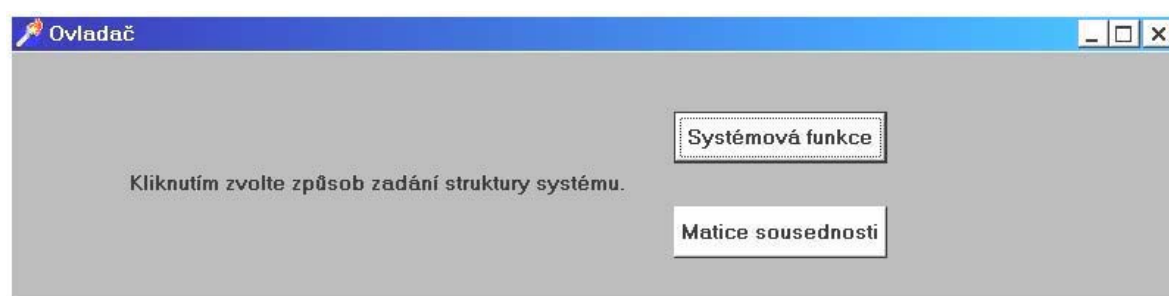
Výstupními údaji, tedy vlastně výsledky celého programu, jsou následující funkční charakteristiky doby do poruchy systému určené pro $m = 100$, tj. pomocí 101 bodů, které jsou v grafu spojeny lomenou čarou: funkce spolehlivosti $R(t)$, distribuční funkce $F(t)$, hustota pravděpodobnosti $f(t)$ a intenzita $\lambda(t)$. Pevně daný počet bodů odpovídá výpočtu centilů doby do poruchy systému. Dalšími výstupními údaji jsou tyto číselné charakteristiky systému vypočítané užitím výše popsaných netradičních numerických postupů: střední hodnota $E(T)$, rozptyl $D(T)$, směrodatná odchylka $\sigma(T)$, variační koeficient $V(T)$ a spolehlivost systému v předem zadaném čase t . Výsledky včetně systému lze uložit do textového souboru. Na obr. 6.1 až 6.5 jsou ukázky jednotlivých oken programu.



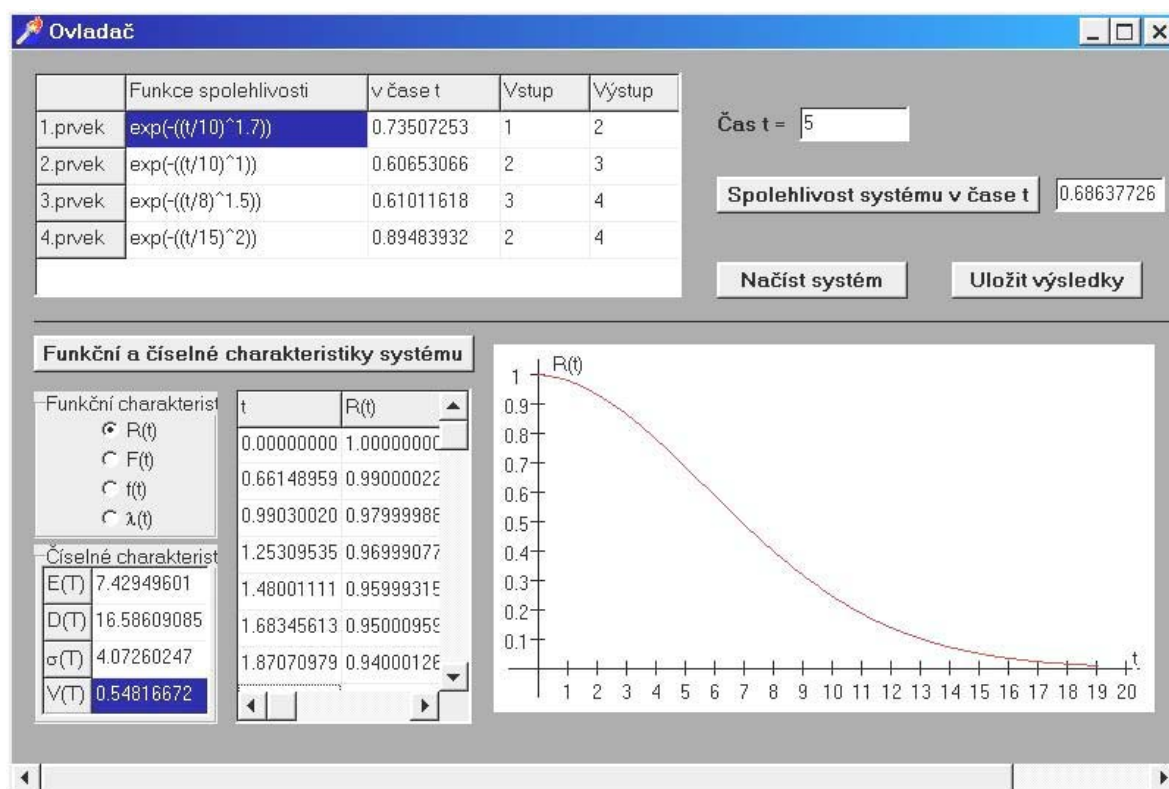
Obr. 6.1



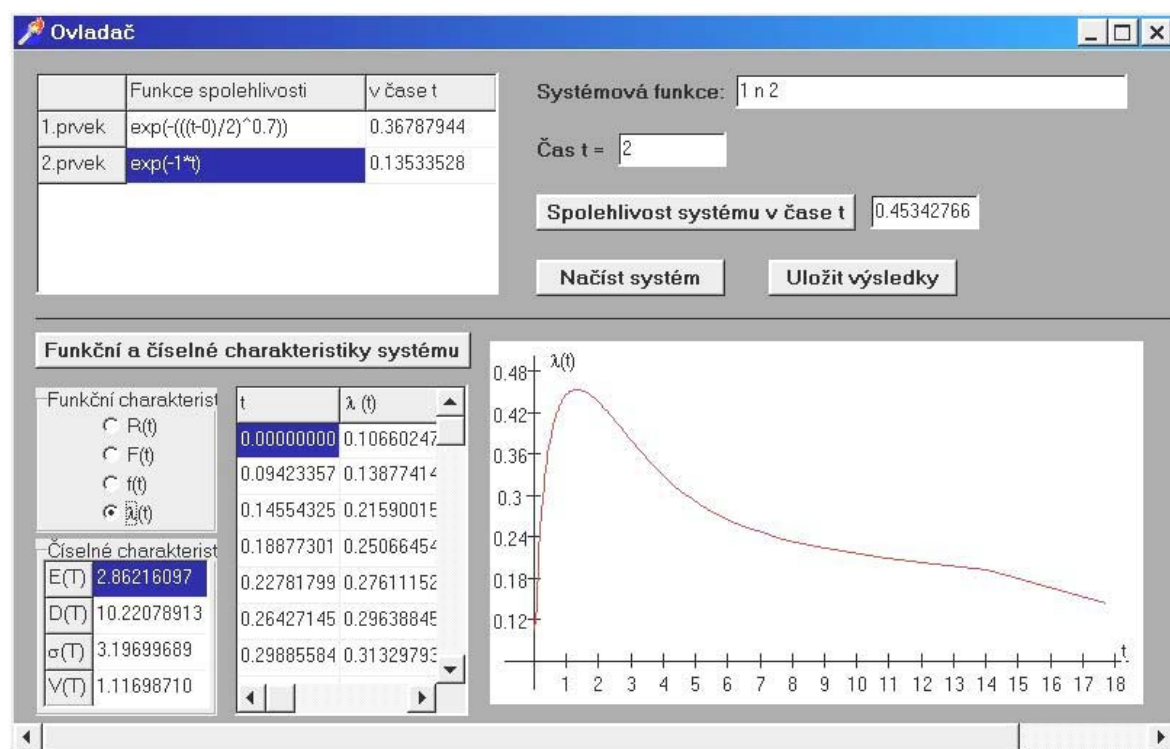
Obr. 6.2



Obr. 6.3



Obr. 6.4



Obr. 6.5

7. Statistické metody a aplikace

Při sledování dob bezporuchového provozu a dob různých druhů údržby reálných objektů určujeme charakteristiky jejich **provozní spolehlivosti** statistickými metodami. Jedná se o vyhodnocení statistických souborů dob do poruch a dob oprav, a to s ohledem na vliv dalších faktorů: druhy poruch, druhy údržby, provozní a opravárenské podmínky aj.

Z hlediska metodiky získávání statistických údajů lze hovořit o **zkušebních plánech** [12] a **specifických postupech** respektující požadavky uživatele daného objektu a využívající jeho informační systémy o provozní spolehlivosti tohoto objektu.

Zkušební plán (plán zkoušek) předepisuje konkrétní postup provedení zkoušky spolehlivosti. Jeho označením je kombinace tří písmen v hranaté závorce $[n, ., .]$, kde písmeno n na 1. místě značí rozsah výběru (počet zkoušených objektů). Na 2. místě je jedno z písmen:

- U, jestliže neobnovované objekty nejsou po poruše nahrazovány (jde o výběr bez vracení),
- R, jestliže neobnovované objekty jsou po poruše nahrazovány novými (jde o výběr s vracením),
- M, jestliže se objekty po poruše obnovují.

Písmena na 3. místě vyjadřují způsob ukončení zkoušky:

- t , jestliže zkouška končí po uplynutí stanovené doby,
- r , jestliže zkouška končí po stanoveném počtu poruch,
- s , jestliže zkouška končí podle pravidel tzv. metody postupné zkoušky,
- (r, t) , jestliže zkouška končí po r poruchách nebo po době t .

Např. $[n, U, n]$, tedy $r = n$, je zkušební plán, kdy pozorujeme n neobnovovaných objektů až do poruchy posledního objektu. Podle zkušebního plánu $[n, U, r]$ sledujeme n neobnovovaných objektů do omezeného počtu poruch $r < n$ a podobně podle zkušebního plánu $[n, U, t]$ sledujeme n neobnovovaných objektů po omezenou dobu t .

Zkušební plány $[n, U, r]$ a $[n, U, t]$ se často kombinují na základě skupinové stratifikace. V těchto případech jde o tzv. **cenzorované náhodné výběry** a jejich kombinace, které vyžadují při zpracování specifické statistické metody [13]. Jako příklad uvedme bodový odhad střední doby bezporuchového provozu exponenciálního rozdělení, kdy pro zkušební plán $[n, U, t]$ místo obvyklého aritmetického průměru je nutno užít vzorec

$$\bar{t} = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m t_i + (n-m)t \right),$$

kde m je počet porouchaných (neobnovovaných) objektů do doby t ukončení zkoušky. Pro zkušební plán $[n, U, r]$ v uvedeném vzorci klademe $m = r$ a $t = t_r$.

Odhady parametrů dvouparametrického Weibullova rozdělení pravděpodobnosti

Bodové odhady parametrů b a δ obvykle určujeme **metodou maximální věrohodnosti**. Pro zkušební plán $[n, U, n]$ jde o určení maxima logaritmu věrohodnostní funkce

$$L(b, \delta; t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{b}{\delta} \left(\frac{t_i}{\delta} \right)^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{t_i}{\delta} \right)^b \right] \right\},$$

pro zkušební plán $[n, U, t]$ pak o určení maxima logaritmu věrohodnostní funkce

$$L(b, \delta; t_1, \dots, t_m, t) = \left[\prod_{i=1}^m \left\{ \frac{b}{\delta} \left(\frac{t_i}{\delta} \right)^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{t_i}{\delta} \right)^b \right] \right\} \right] \left\{ \exp \left[- \left(\frac{t}{\delta} \right)^b \right] \right\}^{n-m}$$

apod.

Bodový odhad parametru tvaru b určíme dle typu zkušebního plánu řešením nelineární rovnice z tabulky 7.1, která odpovídá maximu věrohodnostní funkce. Pro iterační metodu řešení této rovnice se často volí startovací hodnota b_0 pomocí variačního koeficientu získaného statistického souboru dob do poruchy [12]. Tuto startovací hodnotu je také možno určit pomocí směrnice β_2 regresní přímky $y = \beta_1 + \beta_2 x$ jedním ze dvou následujících postupů. Ze vztahu pro distribuční funkci Weibullova rozdělení obdržíme po opakovaném logaritmování vztah, který se používá ke grafickému testování Weibullova rozdělení,

$$\ln \left[-\ln(1 - F(t)) \right] = -b \ln \delta + b \ln t,$$

kde pro výpočet regresní přímky klademe

$$y_i = \ln \left[-\ln(1 - F(t_i)) \right] = \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right], \quad x_i = \ln t_i.$$

Podobně ze vztahu pro intenzitu poruch Weibullova rozdělení získáme po logaritmování vztah, který se také používá ke grafickému testování Weibullova rozdělení,

$$\ln \lambda(t) = \ln b - b \ln \delta + (b-1) \ln t,$$

kde pro výpočet regresní přímky klademe

$$y_i = \ln \lambda(t_i) = -\ln \left[n \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) (t_{i+1} - t_i) \right], \quad x_i = \ln t_i.$$

Pro další výpočty pak volíme vztahy z tabulek 7.2, 7.3 a 7.5.

Tabulka 7.1

Zkušební plán	Rovnice pro bodový odhad parametru b
$[n, U, n]$	$\left(\frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \ln t_i\right) \sum_{i=1}^n t_i^b - n \sum_{i=1}^n t_i^b \ln t_i = 0$
$[n, U, t]$	$\left(\frac{m}{b} + \sum_{i=1}^m \ln t_i\right) \left[\sum_{i=1}^m t_i^b + (n-m)t^b \right] - m \left[\sum_{i=1}^m t_i^b \ln t_i + (n-m)t^b \ln t \right] = 0$
$[n, U, r]$	$\left(\frac{r}{b} + \sum_{i=1}^r \ln t_i\right) \left[\sum_{i=1}^r t_i^b + (n-r)t_r^b \right] - r \left[\sum_{i=1}^r t_i^b \ln t_i + (n-r)t_r^b \ln t_r \right] = 0$
$[n, M, t]$	$\left(\frac{m}{b} + \sum_{i=1}^m \ln t_i\right) \left[\sum_{i=1}^m t_i^b + \left(t - \sum_{i=1}^m t_i\right)^b \right] - m \left[\sum_{i=1}^m t_i^b \ln t_i + \left(t - \sum_{i=1}^m t_i\right)^b \ln \left(t - \sum_{i=1}^m t_i\right) \right] = 0$
$[n, M, r]$	$\left(\frac{r}{b} + \sum_{i=1}^r \ln t_i\right) \sum_{i=1}^r t_i^b - r \sum_{i=1}^r t_i^b \ln t_i = 0$

Pomocí odhadu parametru tvaru b vypočteme pro daný zkušební plán bodový odhad parametru měřítka δ ze vztahu z tabulky 7.2.

Tabulka 7.2

Zkušební plán	Bodový odhad parametru δ
$[n, U, n]$	$\delta = \left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i^b}{n} \right)^{\frac{1}{b}}$
$[n, U, t]$	$\delta = \left(\frac{\sum_{i=1}^m t_i^b + (n-m)t^b}{m} \right)^{\frac{1}{b}}$
$[n, U, r]$	$\delta = \left(\frac{\sum_{i=1}^r t_i^b + (n-r)t_r^b}{r} \right)^{\frac{1}{b}}$
$[n, M, t]$	$\delta = \left(\frac{n \left[\sum_{i=1}^m t_i^b + \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right)^b \right]}{m} \right)^{\frac{1}{b}}$
$[n, M, r]$	$\delta = \left(\frac{n \sum_{i=1}^r t_i^b}{r} \right)^{\frac{1}{b}}$

Pro výpočet intervalových odhadů $\langle \delta_D; \delta_H \rangle$, $\langle b_D; b_H \rangle$ parametrů δ a b se spolehlivostí $1 - \alpha$ vypočteme nejprve rozptyly $D(\cdot)$ podle vztahů z tabulky 7.3, kde je $a = \delta^b$. Poznamenejme, že odhady z tabulek 7.1 a 7.2 jsou korelované, takže pro simultánní intervalový odhad vektoru parametrů (δ, b) je nutno respektovat jejich kovarianci.

Tabulka 7.3

Zkušeb. plán	$D(\cdot)$	Vztah
$[n, U, n]$	$D(a)$	$\frac{a^4 \left[\frac{n}{b^2} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n t_i^b (\ln t_i)^2 \right]}{na^2 \left[\frac{n}{b^2} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n t_i^b (\ln t_i)^2 \right] - \left(\sum_{i=1}^n t_i^b \ln t_i \right)^2}$
	$D(b)$	$\frac{na^2}{na^2 \left[\frac{n}{b^2} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n t_i^b (\ln t_i)^2 \right] - \left(\sum_{i=1}^n t_i^b \ln t_i \right)^2}$
$[n, U, t]$	$D(a)$	$\frac{a^4 \left[\frac{m}{b^2} + \frac{1}{a} \left(\sum_{i=1}^m t_i^b (\ln t_i)^2 + (n-m)t^b (\ln t)^2 \right) \right]}{ma^2 \left[\frac{m}{b^2} + \frac{1}{a} \left(\sum_{i=1}^m t_i^b (\ln t_i)^2 + (n-m)t^b (\ln t)^2 \right) \right] - \left[\sum_{i=1}^m t_i^b \ln t_i + (n-m)t^b \ln t \right]^2}$
	$D(b)$	$\frac{ma^2}{ma^2 \left[\frac{m}{b^2} + \frac{1}{a} \left(\sum_{i=1}^m t_i^b (\ln t_i)^2 + (n-m)t^b (\ln t)^2 \right) \right] - \left[\sum_{i=1}^m t_i^b \ln t_i + (n-m)t^b \ln t \right]^2}$
$[n, U, r]$	$D(a)$	$\frac{a^4 \left[\frac{r}{b^2} + \frac{1}{a} \left[\sum_{i=1}^r t_i^b (\ln t_i)^2 + (n-r)t_r^b (\ln t_r)^2 \right] \right]}{ra^2 \left[\frac{r}{b^2} + \frac{1}{a} \left(\sum_{i=1}^r t_i^b (\ln t_i)^2 + (n-r)t_r^b (\ln t_r)^2 \right) \right] - \left[\sum_{i=1}^r t_i^b \ln t_i + (n-r)t_r^b \ln t_r \right]^2}$
	$D(b)$	$\frac{ra^2}{ra^2 \left[\frac{r}{b^2} + \frac{1}{a} \left(\sum_{i=1}^r t_i^b (\ln t_i)^2 + (n-r)t_r^b (\ln t_r)^2 \right) \right] - \left[\sum_{i=1}^r t_i^b \ln t_i + (n-r)t_r^b \ln t_r \right]^2}$
$[n, M, t]$	$D(a)$	$\frac{a^4 \left[\frac{m}{b^2} + \frac{n}{a} \left[\sum_{i=1}^m t_i^b (\ln t_i)^2 + \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right)^b \left(\ln \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right) \right)^2 \right] \right]}{\frac{m^2 a^2}{b^2} + mna \left[\sum_{i=1}^m t_i^b (\ln t_i)^2 + \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right)^b \left(\ln \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right) \right)^2 \right] - n^2 \left[\sum_{i=1}^m t_i^b \ln t_i + \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right)^b \ln \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right) \right]^2}$
	$D(b)$	$\frac{ma^2}{\frac{m^2 a^2}{b^2} + mna \left[\sum_{i=1}^m t_i^b (\ln t_i)^2 + \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right)^b \left(\ln \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right) \right)^2 \right] - n^2 \left[\sum_{i=1}^m t_i^b \ln t_i + \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right)^b \ln \left(t - \sum_{i=1}^m t_i \right) \right]^2}$
$[n, M, r]$	$D(a)$	$\frac{a^4 \left[\frac{r}{b^2} + \frac{n}{a} \sum_{i=1}^r t_i^b (\ln t_i)^2 \right]}{\frac{r^2 a^2}{b^2} + nra \sum_{i=1}^r t_i^b (\ln t_i)^2 - n^2 \left(\sum_{i=1}^r t_i^b \ln t_i \right)^2}$
	$D(b)$	$\frac{ra^2}{\frac{r^2 a^2}{b^2} + nra \sum_{i=1}^r t_i^b (\ln t_i)^2 - n^2 \left(\sum_{i=1}^r t_i^b \ln t_i \right)^2}$

Konfidenční meze pro intervalové odhady $\langle \delta_D; \delta_H \rangle$, $\langle b_D; b_H \rangle$ parametrů δ a b se spolehlivostí $1 - \alpha$ určíme z tabulky 7.4, kde $u_{1-\alpha/2}$ je $(1 - \alpha/2)$ -kvantil normovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti $N(0;1)$, speciálně pro $1 - \alpha = 0,95$, resp. $0,99$, je $u_{0,975} = 1,960$, resp. $u_{0,995} = 2,576$. Do konfidenčních mezí pak dosazujeme pro dané zkušební plány hodnoty z tabulek 7.1, 7.2 a 7.3. Uvedené odhady jsou dvoustranné, avšak jednoduchou úpravou z nich můžeme získat odhady jednostranné.

Tabulka 7.4

Parametr	Dolní konfidenční mez δ_D a b_D	Horní konfidenční mez δ_H a b_H
δ	$\left[\delta^b - u_{1-\alpha/2} \sqrt{D(a)} \right]^{\frac{1}{b}}$	$\left[\delta^b + u_{1-\alpha/2} \sqrt{D(a)} \right]^{\frac{1}{b}}$
b	$b - u_{1-\alpha/2} \sqrt{D(b)}$	$b + u_{1-\alpha/2} \sqrt{D(b)}$

Statistické metody pro výpočty spolehlivostních charakteristik jsou v různých rozsazích implementovány v některých profesionálních statistických softwarových produktech pro PC (jde např. o software STATISTICA, S-PLUS, QCExpert, STATGRAPHICS).

Nejčastěji se pro vyhodnocení spolehlivosti používají tyto statistické metody [5,6]:

a) **Popisná statistika** všech zvolených znaků pomocí momentových a kvantilových číselných charakteristik polohy, variability, šikmosti a špičatosti souborů a jejich grafického vyjádření pomocí histogramů, krabicových a sloupcových grafů a grafů závislostí, příp. také pomocí Paretovy analýzy.

b) **Nalezení a testování rozdělení pravděpodobnosti** doby bezporuchového provozu a doby údržby (poruchového prostoje, preventivní údržby apod.) po eliminaci heterogenity statistického souboru (odstranění extrémních hodnot a vlivu dalších faktorů) a případné transformaci.

c) **Bodové odhady a intervalové odhady** číselných charakteristik spolehlivosti a parametrů rozdělení pravděpodobnosti uvedených náhodných veličin, přičemž u parametrů převládají maximálně věrohodné odhady (viz např. výše uvedené odhady parametrů Weibullova rozdělení).

d) **Parametrické a neparametrické testy hypotéz** o číselných charakteristikách a parametrech rozdělení pravděpodobnosti doby bezporuchového provozu a doby údržby, případně jejich porovnání po stratifikaci souboru vzhledem ke druhům poruch a údržby.

e) **Analýza rozptylu a neparametrické testy** pro posouzení vlivu druhů poruch a údržby na dobu bezporuchového provozu a dobu obnovy.

f) **Vícerozměrné metody a regresní analýza** pro posouzení a vyjádření závislosti sledovaných náhodných veličin a jejich dynamiky.

Jako příklady použití některých z uvedených statistických metod pro vyhodnocení provozní spolehlivosti lze uvést následující výsledky zpracování statistických souborů na PC.

Příklad 7.1

Dlouhodobým sledováním byly získány údaje o dobách bezporuchového provozu a dobách údržby obnovovaného energetického zařízení. Zpracovaný statistický soubor o rozsahu $n = 276$ byl simulován na základě reálných dat důvěrného charakteru jako realizace necenzorovaného výběru. Na ukázkou uvádíme část získaných výsledků:

1. Bodové a intervalové odhady číselných charakteristik rozdělení pravděpodobnosti doby bezporuchového provozu:

Count = 276	Lower quartile = 56.95
Average = 261.558	Upper quartile = 356.35
Median = 156.65	Interquartile range = 299.4
Variance = 84003.0	Skewness = 1.74093
Standard deviation = 289.833	Std. skewness = 11.8075
Standard error = 17.4459	Kurtosis = 3.22018
Minimum = 0.1	Std. kurtosis = 10.9202
Maximum = 1490.8	Coeff. of variation = 110.81%
Range = 1490.7	Sum = 72190.1

95.0% confidence interval for mean: 261.558 +/- 34.3445 [227.214; 295.903]

95.0% confidence interval for standard deviation: [267.501; 316.265]

2. Jako nejlepší rozdělení pravděpodobnosti doby bezporuchového provozu bylo nalezeno rozdělení Weibullovo. Toto rozdělení bylo testováno pomocí testu chí-kvadrát. Byly rovněž určeny bodové a intervalové odhady parametrů a kvantilů rozdělení (Shape = b , Scale = δ):

Chi-Square = 6.32611 with 8 d.f. P-Value = 0.610754

Maximum log-likelihood = -505.941

Shape = 0.797598

Scale = 232.96

Confidence interval for shape: [0.725111; 0.87733]

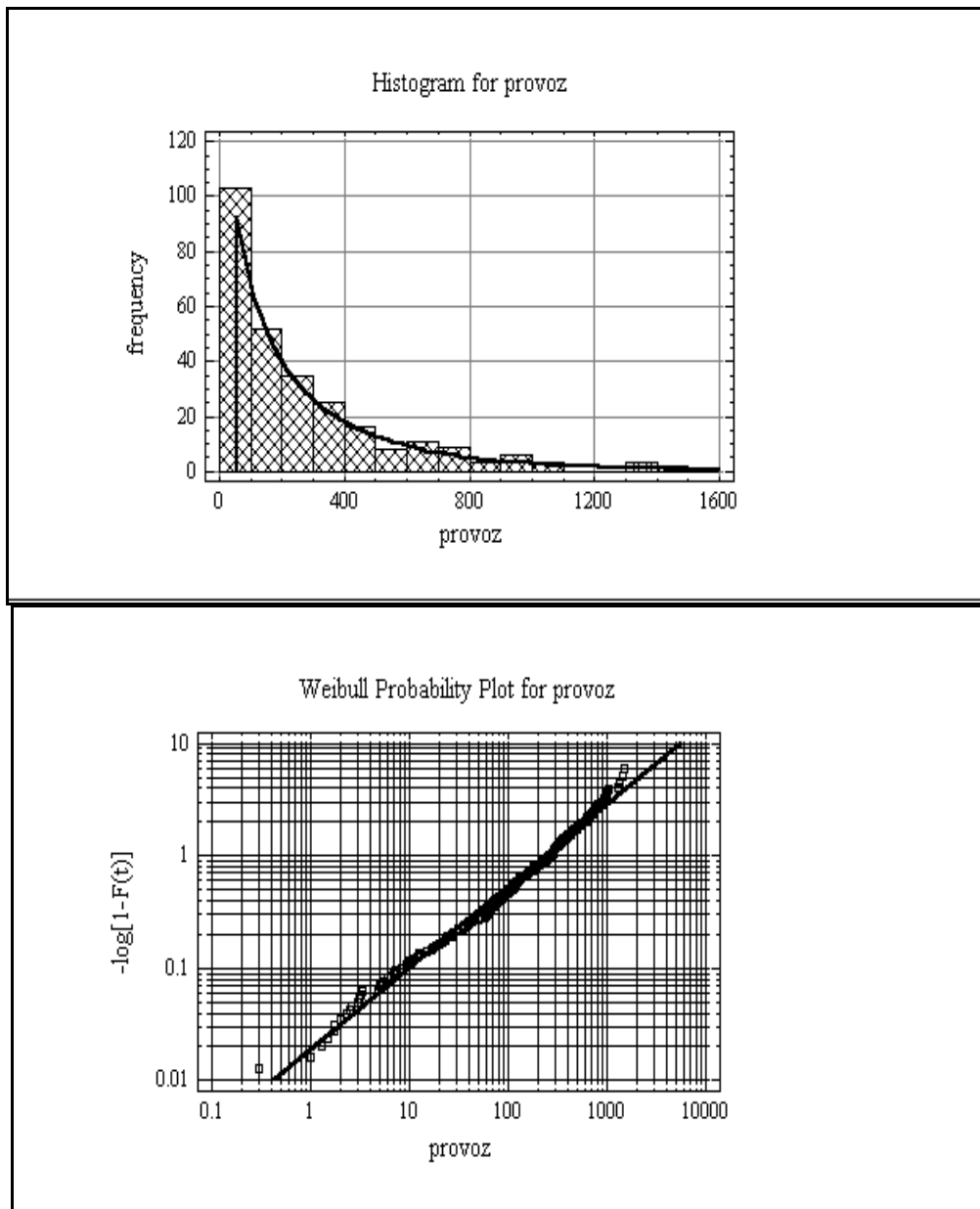
Confidence interval for scale: [199.473; 272.068]

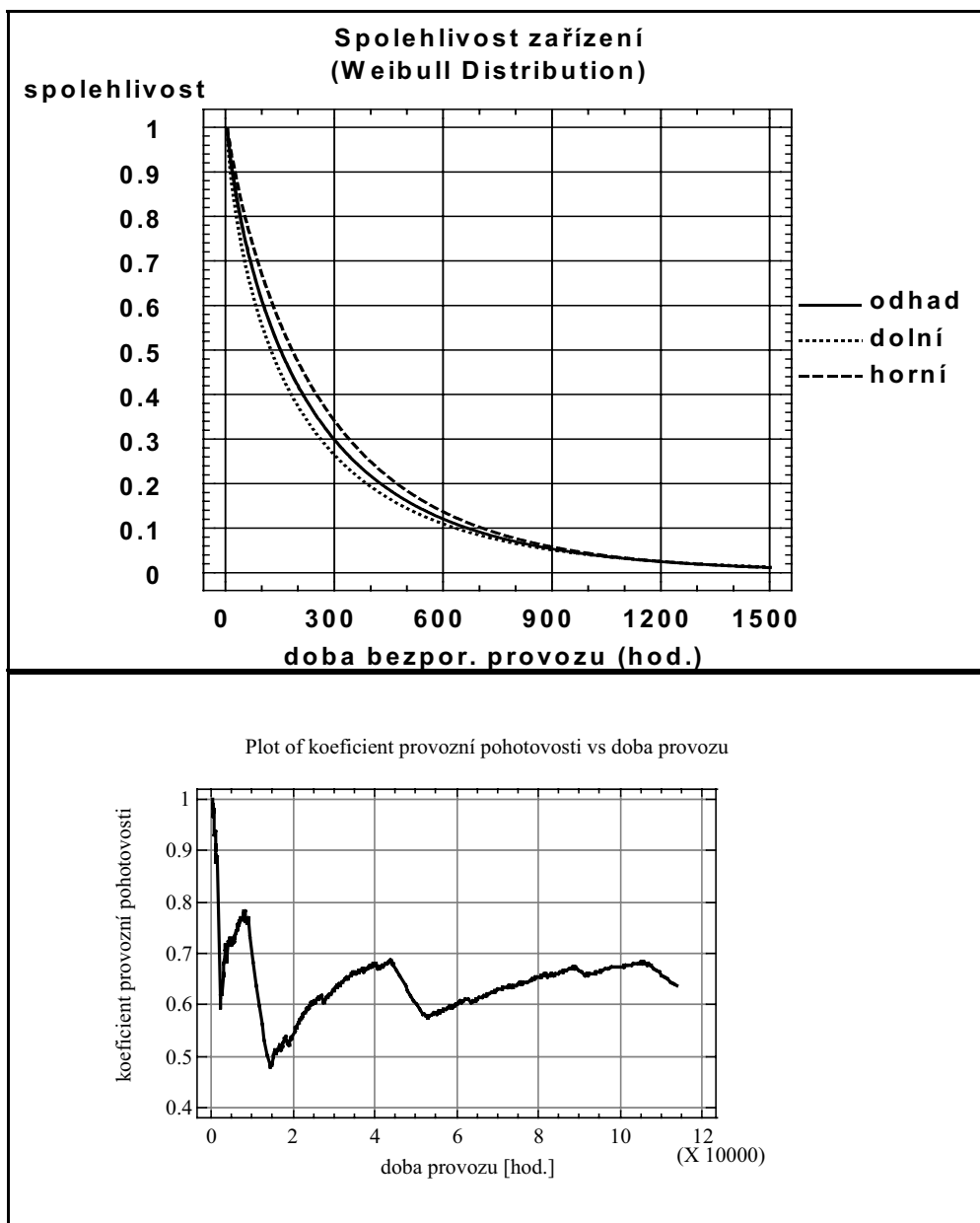
Percentile	Lower	Estimate	Upper
0.1	0.0167	0.0404	0.0978
0.135	0.0252	0.0589	0.1376
0.2	0.0432	0.0964	0.2151
0.5	0.1519	0.3046	0.6106
1	0.3941	0.7286	1.3470
5	3.6649	5.6234	8.6285
10	9.7838	13.8659	19.6511
20	27.1149	35.5270	46.5489
50	123.6948	147.1340	175.0146
90	566.5297	662.8478	775.5413
95	777.6851	921.9413	1092.9562
99	1293.3669	1580.6464	1931.7357
99.865	1971.1079	2485.5748	3134.3196

3. Bodový a intervalový odhad koeficientu provozní pohotovosti k_p :

Estimate	Std. Error	Lower Limit	Upper Limit
0.652151	0.00083592	0.650513	0.653790

4. Grafy:





Příklad 7.2

Simulací na PC Weibullova rozdělení $W(b, \delta)$ s parametry $b = 2,5$ a $\delta = 200$ hod. byl získán uspořádaný statistický soubor dob do poruchy v hodinách o rozsahu $n = 50$:

27,9	41,2	52,6	53,5	56,0	75,1	80,3	83,1	83,3	87,7
92,9	97,8	97,9	112,7	117,8	119,8	121,6	130,9	133,6	137,4
141,0	144,0	144,0	156,5	158,2	160,6	170,5	175,1	175,5	184,5
192,4	197,9	206,6	209,7	214,2	221,5	225,4	235,2	239,4	242,2
252,8	256,0	265,4	267,8	276,7	278,0	281,3	283,0	291,3	319,2

1. Pro statistický soubor se všemi hodnotami (bez cenzorování) byly vypočteny odhady parametrů a kvantilů:

Model fitting results (Probability plot): SPOL.tround

Parameter estimates: shape = 2.14826 scale = 190.183

Percentile	Estimate
0.1	7.63475
0.135	8.78010
0.2	10.54443
0.5	16.16462
1	22.34608
5	47.72154
10	66.71685
20	94.61122
50	160.35309
90	280.40175
95	316.94262
99	387.17563
99.865	458.03422

Distribution: Weibull Censoring: Complete

Model fitting results (Hazard plot): SPOL.tround

shape = 2.08328 scale = 188.667

Distribution: Weibull Censoring: Complete

Model fitting results (Maximum Likelihood Estimation): SPOL.tround

Maximum log-likelihood = -37.284

shape = 2.35161

scale = 189.109

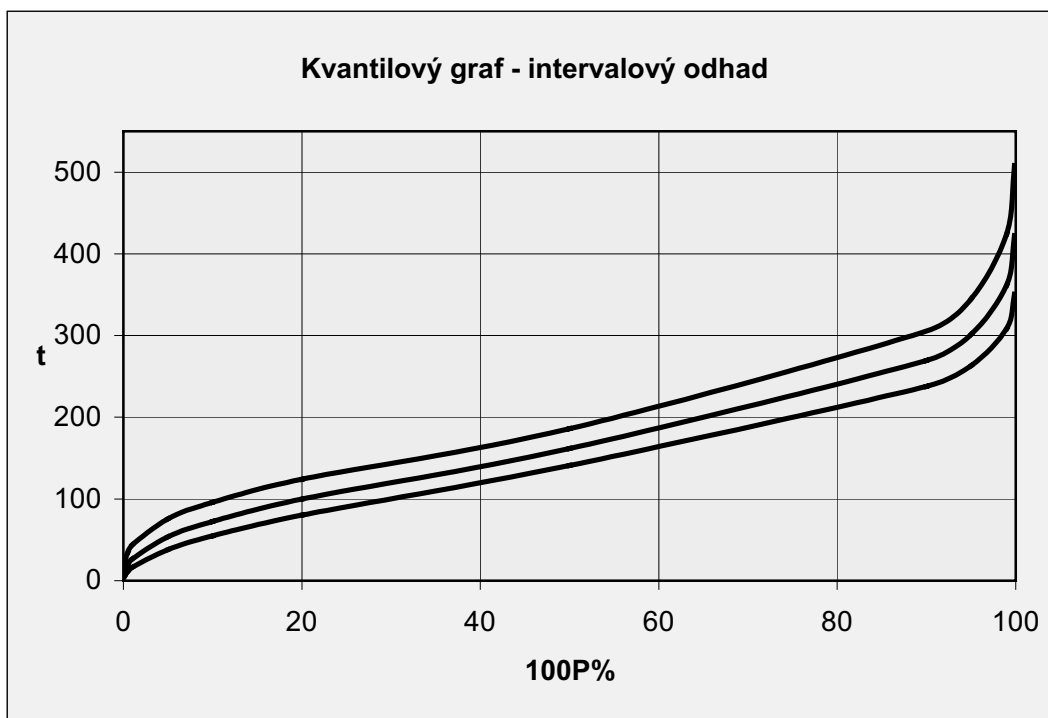
Confidence interval for shape = 1.87698 2.94626

Confidence interval for scale = 167.068 214.059

Percentile	Lower	Estimate	Upper
0.1	4.9273	10.0250	20.3965
0.135	5.7595	11.3904	22.5263
0.2	7.0656	13.4644	25.6579
0.5	11.3793	19.8922	34.7738
1	16.3235	26.7398	43.8029
5	37.9183	53.4784	75.4236
10	54.8915	72.6300	96.1007
20	80.4473	99.9320	124.1359
50	140.8381	161.8175	185.9221
90	237.9279	269.6136	305.5191
95	263.3169	301.5376	345.3060
99	308.5209	362.0363	424.8343
99.865	350.7797	422.1147	507.9563

Distribution: Weibull Censoring: Complete

Na následujícím obrázku je znázorněn graf vypočtených intervalových odhadů kvantilů metodou maximální věrohodnosti se spolehlivostí 95%.



2. Po cenzorování statistického souboru dobou 150 hod., která nahrazuje tučně označené hodnoty v tabulce (avšak odpovídá bezporuchovému stavu v dané době), byly vypočteny odhady parametrů:

Model fitting results (Probability plot): SPOL.tcenz

Parameter estimates: shape = 2.1908 scale = 185.457

Percentile	Estimate
0.1	7.92465
0.135	9.08879
0.2	10.87641
0.5	16.53580
1	22.71591
5	47.80187
10	66.39575
20	93.51938
50	156.88704
90	271.37994
95	306.01636
99	372.37807
99.865	439.09322

Distribution: Weibull Censoring: Type I

Model fitting results (Hazard plot): SPOL.tcenz

shape = 2.04513 scale = 190.239

Distribution: Weibull Censoring: Type I

Model fitting results (Maximum Likelihood Estimation): SPOL.tcen

Maximum log-likelihood = -42.0225

shape = 2.24988

scale = 185.573

Confidence interval for shape = 1.53831 3.29059

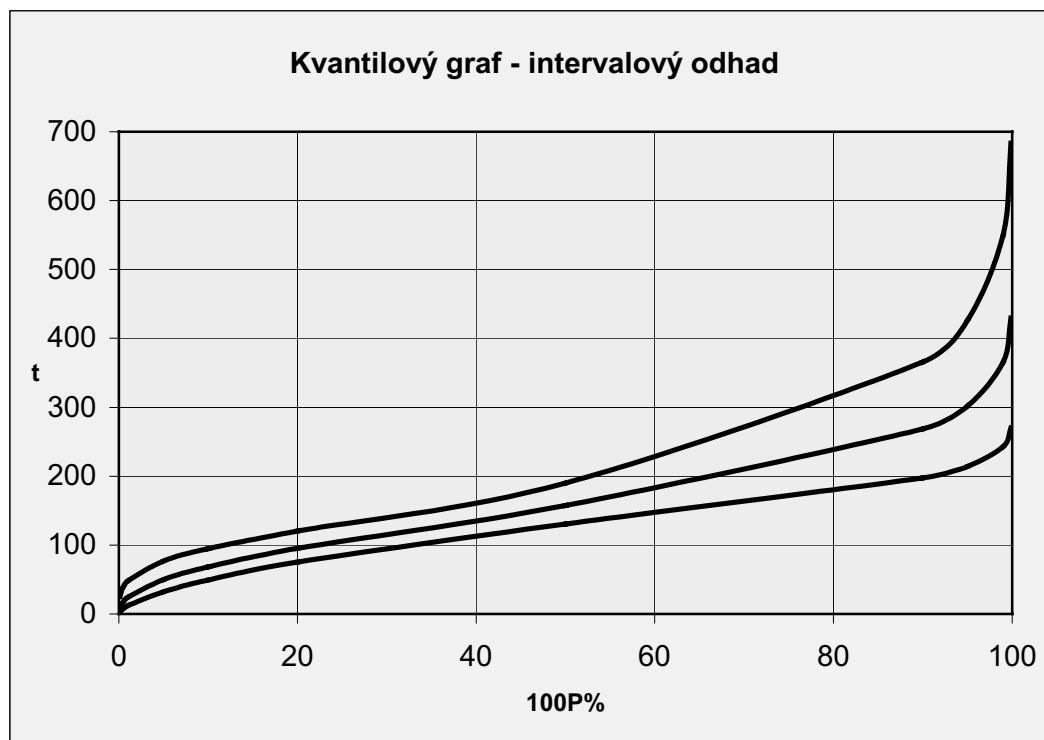
Confidence interval for scale = 150.239 229.219

Percentile	Lower	Estimate	Upper
0.1	2.9403	8.6140	25.2357
0.135	3.5324	9.8440	27.4330
0.2	4.4914	11.7247	30.6073
0.5	7.8604	17.6305	39.5441
1	12.0021	24.0186	48.0661
5	32.1154	49.5654	76.4968
10	49.1936	68.2538	94.6989
20	75.4853	95.2756	120.2546
50	130.7385	157.6767	190.1654
90	197.5809	268.8494	365.8247
95	214.0484	302.2081	426.6781
99	243.1686	365.8536	550.4366
99.865	270.0991	429.5370	683.0903

Distribution: Weibull

Censoring: Type I

Na následujícím obrázku je znázorněn graf vypočtených intervalových odhadů kvantilů metodou maximální věrohodnosti se spolehlivostí 95%.



Porovnáním získaných výsledků pro necenzorovaný a cenzorovaný soubor snadno zjistíme, že cenzorování má nezanedbatelný vliv na variabilitu a přesnost odhadů. Cenzorování je ale obvykle vynuceno omezenou možnou dobou zkoušek. V případě zanedbání cenzorovaných dat při výpočtech bychom získali nesprávné výsledky a závěry.

8. Závěr

Problematika sledování a vyhodnocování provozní spolehlivosti výrobků a zařízení je velmi rozsáhlá a z hlediska aplikace statistických metod poměrně složitá. Získané výsledky však mají mimořádný význam jak pro výrobce, tak i pro uživatele. V současné době totiž nasazení moderních statistických metod a využití informačních systémů umožňuje dosáhnout dostatečně věrný obraz o významných vlastnostech sledovaných objektů z hlediska jejich poruchovosti, životnosti a udržitelnosti. Metody teorie spolehlivosti proto nezastupitelně patří do komplexu metod statistického řízení jakosti a jejich opomíjení má za následek ekonomické ztráty výrobce a sníženou důvěru uživatele.

Literatura

1. Němec, J. – Sedláček, J. a kol. *Spolehlivost strojních zařízení*. Praha, SNTL/Alfa 1979.
2. Bílý, M. – Sedláček, J. *Spolehlivost mechanických konstrukcí*. Bratislava, Veda 1983.
3. Ireson, W. G., *Reliability Handbook Engineering and Management*. New York, McGraw-Hill 1996.
4. Schneeweis, W. *Teória spoľahlivosti*. Bratislava, Alfa 1981.
5. Meloun, M. – Militký, J. *Statistické zpracování experimentálních dat*. Praha, Plus 1994.
6. Kupka, K. *Statistické řízení jakosti*. Trilobyte, Pardubice 1997. ISBN 80-238-1818-X
7. Karpíšek, Z. – Jelínek, P. *Stochastické metody analýzy spolehlivosti*. In: Sborník konference Analýza dat '01/II – Moderní statistické metody. Lázně Bohdaneč 30.10. – 2.11. 2001, s. 109-127. ISBN 80-238-8293-7.
8. Karpíšek, Z. – Jelínek, P. – Dostál, P. *Určení spolehlivosti systému pomocí jedné větvy z teorie grafů*. In: Sborník z 10. semináře Moderní matematické metody v inženýrství v Dolní Lomné u Jablunkova 30.5. – 1.6.2001. Ostrava 2001, s. 91-95, ISBN 80-248-0013-6.
9. Karpíšek, Z. – Jelínek, P. – Dostál, P. – Doubravský, K. *Algoritmus a numerická realizace výpočtu charakteristik spolehlivosti systému*. In: Sborník z 11. semináře Moderní matematické metody v inženýrství v Dolní Lomné u Jablunkova 3.6. – 5.6.2002. Ostrava 2002, s. 74-78. ISBN 80-248-0184-1.
10. Karpíšek, Z. – Jelínek, P. *Fuzzy stochastické metody modelování spolehlivosti*. In: Sborník celostátního semináře Analýza dat 2002/II. Lázně Bohdaneč 26.-29.11.2002, p. 90-103, ISBN 80-239-0204-0.
11. Dostál, P. *Spolehlivost soustavy n prvků 5.2*. Program pro PC. OSNM ÚM FSI VUT, Brno 2003.
12. NORMY ČSN: 01 0103, ISO 9000-4/IEC 300-1, 01 0601, 01 0602, 01 0606, 01 0611, 01 0631, 01 0642, 01 0651, 01 0652, 01 660, IEC 812, IEC 1078, EN 60300-2, IEC 300-1/ISO 9000-4, IEC 300-3-1, IEC 300-3-2, IEC 300-3-3, IEC 300-3-4, IEC 300-3-9, IEC 60300-3-11, IEC 60300-3-6, IEC 60300-3-7, 18 0023, EN 61069-5, 26 7420, 31 9816, 34 2617, EN 61086-3-1, EN 61751.

Referát je součástí řešení grantového projektu GAČR reg. č. 103/05/0292 „Optimalizace navrhování progresivních betonových konstrukcí“.